Écrire les instructions GAP pour répondre aux questions ci-dessous.

Exercice 1. Soit la matrice à termes dans le corps $\mathbb{F}_4$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. vérifier que les lignes de G sont libres.
2. construire le code linéaire C sur $\mathbb{F}_4$ de matrice génératrice G.
3. trouver la distance minimale de C.
4. trouver une matrice de contrôle de C.
5. 1111 est il un mot de C ? sinon peut t-on le décoder ?
6. afficher tous les mots de C.

Exercice 2.

1. factoriser le polynôme $x^{23} - 1$ dans $\mathbb{F}_2[x]$.
2. construire le code cyclique C engendré par l'un des facteurs, de plus haut degré, de la question précédente
3. déterminer la dimension, la longueur, la distance minimale de C. Est il parfait ? Comment s'appelle ce code ?
4. 1...10...01 (11 uns, 11 zéros, puis 1) est il un mot de C ? sinon, peut t-on le décoder ?
5. construire le code cyclique C' engendré par l'autre facteur, de plus haut degré, de première question.
6. C et C' sont-ils équivalents ?

Exercice 3.

1. définir le $\mathcal{RM}(3,7)$, afficher sa longueur, sa dimension, sa distance minimale, tous ses mots, son cardinal, tous ses mots de poids minimal, est-il parfait ? cyclique ?
2. montrer que le code de Reed-Muler $\mathcal{RM}(3,7)$ a pour code dual $\mathcal{RM}(3,7)$.