



Documents et calculatrices non autorisés.

Durée 2h

Exercice 1. Le code de Golay triaire étendu noté C_{12} est le code linéaire sur \mathbb{F}_3 de matrice génératrice $G_{12} = [I_6|B]$ où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que :

1. La matrice $H = [-B|I_6]$ de taille 6×12 est une matrice de contrôle de C_{12} .
2. Le code C_{12} est auto-dual.
3. La matrice $H' = [I_6|B]$ de taille 6×12 est une matrice de contrôle de C_{12} .
4. La matrice $G' = [-B|I_6]$ de taille 6×12 est une matrice génératrice de C_{12} .
5. Le poids de tout mot de C_{12} est multiple de 3.
6. La distance minimale de C_{12} est 6.
7. Déduire à partir de C_{12} l'existence d'un code parfait de distance minimale 5. Ce code s'appelle le code de Golay triaire.

Exercice 2.

1. Quels sont les deux seuls polynômes irréductibles unitaires de degré 3 sur \mathbb{F}_2 ?
2. Factoriser $X^7 + 1$ sous forme d'un produit de polynômes irréductibles sur \mathbb{F}_2 .
Dans toute la suite, on s'intéresse aux codes linéaires cyclique sur \mathbb{F}_2 de longueur 7.
3. Montrer qu'il n'existe pas de tel code de dimension 2, ni de dimension 5.
4. Que penser du code de dimension 1 ?
5. On considère le code associé au diviseur $X + 1$ de $X^7 + 1$. Déterminer sa dimension, sa distance minimale, le nombre d'erreurs qu'il détecte et le nombre d'erreurs qu'il corrige. Quelle est sa matrice génératrice ?
6. On considère le code associé au diviseur $X^3 + X + 1$ de $X^7 + 1$. Déterminer sa dimension, sa distance minimale, le nombre d'erreurs qu'il détecte et le nombre d'erreurs qu'il corrige. Quelle est sa matrice génératrice ?

Exercice 3. Montrer que le code de Golay triaire (exercice 1) est un code cyclique et expliciter son polynôme générateur.