Université Mohammed V Agdal
Faculté des Sciences
Rabat

Année 2009-10
Master CSI
Théorie des codes
Contrôle Final - S2

Exercice 1. *(6 pts)*

Soit C le code linéaire ternaire (sur $\mathbb{F}_3$) dont une matrice génératrice est

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Expliciter les paramètres de ce code et tous ses mots. Coder le message $v = (12)$.
2. Montrer que le code C est aussi engendré par la matrice

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Coder le même message v avec G'.
4. Construire une matrice de contrôle H de C et calculer la distance minimale.
5. La matrice H permet de définir l'application syndrome de ($\mathbb{F}_3^5$ dans $\mathbb{F}_3^2$) qui associe un mot m à son syndrome $S(m)$. Si le syndrome $S(m)$ est non nul, une erreur est détectée. Montrer que deux mots ont le même syndrome si, et seulement si, leur différence est un mot du code.
6. On reçoit le mot $m = (12121)$. Est-il correct ? Sinon, trouver un autre mot ayant le même syndrome et décoder m.

Exercice 2. *(4 pts)*

Soit C un $[n, k]$-code cyclique de polynôme générateur $g(x)$ et α une racine primitive n-ième de l'unité. Si $g(x)$ admet parmi ses racines δ puissances de α successives, alors $d(C) \geq \delta + 1$.

Exercice 3. *(4 pts)*

Soit le corps $\mathbb{F}_q$, $n = q - 1$ et l'entier k tel que $1 \leq k < n$, $\alpha \in \mathbb{F}^*$ un élément primitif et l'ensemble $S = \{1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}\} \subset \mathbb{F}_q$. Montrer que le code de Reed-Solomon

$$\begin{aligned} \mathcal{RS}_{\mathbb{F}_q,S}([n,k]) = \ & \{c_0, c_1, \cdots, c_{n-1} \in \mathbb{F}_q^n \mid \\ & c(X) = c_0 + c_1 X^1 + \cdots + c_{n-1} X^{n-1} \\ & \text{et } c(\alpha) = c(\alpha^2) = \cdots = c(\alpha^{n-k}) = 0\}. \end{aligned}$$

Exercice 4. *(6 pts)*

On considère le code de Reed-Solomon généralisé $C = \mathcal{GRS}_{\alpha,v}(6,2)$ sur le corps $\mathbb{F}_7$ où $\alpha = (2,4,6,1,3,5)$ et $v = (1,1,1,1,1,1)$.

1. Calculer le vecteur u tel que $C^{\perp} = \mathcal{GRS}_{\alpha,u}(6,4)$.
2. Calculer le syndrome polynomiale d'un vecteur $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$.
3. Décoder $p = (1,3,6,5,4,2)$.
